

Curso Académico: ( 2023 / 2024 )

Fecha de revisión: 11-09-2023

Departamento asignado a la asignatura: Departamento de Matemáticas

Coordinador/a: TERAN VERGARA, FERNANDO DE

Tipo: Obligatoria Créditos ECTS : 6.0

Curso : 1 Cuatrimestre : 1

**REQUISITOS (ASIGNATURAS O MATERIAS CUYO CONOCIMIENTO SE PRESUPONE)**

Álgebra lineal.

Cálculo I.

Es aconsejable tener unos conocimientos básicos del programa MATLAB.

**OBJETIVOS**

El estudiante se familiarizará con los algoritmos básicos para resolver los cuatro problemas fundamentales del álgebra lineal numérica (ALN), a saber: (1) la resolución de sistemas lineales, (2) la resolución de problemas de mínimos cuadrados, (3) el cálculo de autovalores y autovectores y (4) el cálculo de la descomposición en valores singulares. Asimismo, incorporará técnicas y herramientas del ALN que pueden serle útil tanto en un futuro desempeño profesional, en ámbitos como el análisis de datos o el reconocimiento de patrones, así como en la investigación en el ámbito de la matemática aplicada y computacional. En concreto, el alumno aprenderá y/o será capaz de manejar:

- Los comandos básicos del programa MATLAB en el contexto de los cuatro problemas del ALN mencionados anteriormente.
  - Los fundamentos básicos del análisis numérico (condicionamiento, estabilidad y complejidad computacional).
  - El análisis de errores en los métodos numéricos, y en particular de los que aparecen en el ámbito del ALN.
  - Los rudimentos básicos del sistema de numeración en coma flotante y su aritmética básica.
  - Las nociones básicas de las normas matriciales (y se hará consciente de su importancia en el cálculo numérico con matrices).
  - Las herramientas y la teoría que hay detrás de los algoritmos que se emplean actualmente para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, tanto para matrices de tamaño pequeño o moderado (métodos directos) como para matrices de gran tamaño (métodos iterativos).
- Las herramientas y la teoría que hay detrás de los algoritmos que se emplean actualmente para el cálculo de autovalores y autovectores de matrices, tanto para matrices de tamaño pequeño o moderado (métodos directos) como para matrices de gran tamaño (métodos iterativos).
- La teoría y las herramientas básicas que hay detrás del cálculo de la descomposición en valores singulares de matrices, así como una aproximación a los algoritmos básicos del cálculo de dicha descomposición.
  - La teoría y las herramientas básicas de la resolución de problemas de mínimos cuadrados.
  - Algunas de las aplicaciones de la descomposición en valores singulares en ámbitos tanto teóricos (distancia al conjunto de matrices de menor rango) como aplicados (la compresión de imágenes o el análisis de componentes principales).
  - Algunas de las aplicaciones del ALN en ámbitos como el análisis de datos o el reconocimiento de imágenes.

Competencias asociadas con esta asignatura:

En esta asignatura el estudiante avanzará en la adquisición de las siguientes competencias especificadas en la memoria de verificación de la titulación:

Competencias básicas:

CB6: Poseer y comprender conocimientos que aporten una base u oportunidad de ser originales en el desarrollo y/o aplicación de ideas, a menudo en un contexto de investigación.

CB7: Que los estudiantes sepan aplicar los conocimientos adquiridos y la capacidad de resolución de problemas en entornos nuevos o poco conocidos dentro de contextos más amplios (o multidisciplinares) relacionados con el área de estudio.

CB8: Que los estudiantes sean capaces de integrar conocimientos y enfrentarse a la complejidad de formular juicios a partir de una información que, siendo incompleta o limitada, incluya reflexiones sobre las responsabilidades sociales y éticas vinculadas a la aplicación de sus conocimientos y juicios.

CB10: Que los estudiantes posean las habilidades de aprendizaje que permitan continuar estudiando de un modo que habrá de ser en gran medida autodirigido o autónomo.

Competencias generales:

CG1: Reunir e interpretar datos de carácter matemático que puedan ser aplicados a otras áreas del conocimiento científico.

CG2: Aplicar los conocimientos adquiridos y poseer capacidad de resolución de nuevos problemas relacionados con las Matemáticas.

CG4: Tener capacidad de generar nuevas ideas que puedan suponer un avance del conocimiento en Matemáticas.

CG5: Ser capaz de comunicar sus conclusiones de forma clara y precisa.

CG6: Ser capaz de estudiar e investigar de forma autónoma.

CG7: Ser capaz de trabajar en equipo y gestionar el tiempo de trabajo del que se dispone.

Competencias específicas:

CE1: Comprender y utilizar el lenguaje matemático.

CE2: Ser capaz de enunciar proposiciones en distintos campos de las matemáticas y construir demostraciones.

CE3: Ser capaz de abstraer las propiedades estructurales y distinguirlas de aquellas que son puramente ocasionales

CE4: Ser capaz de resolver problemas matemáticos, planificando su resolución en función de las herramientas disponibles y de las restricciones de tiempo y recursos.

CE5: Ser capaz de desarrollar programas informáticos que resuelvan problemas matemáticos utilizando para cada caso el entorno computacional adecuado.

CE6: Ser capaz de desarrollar e implementar algoritmos, más o menos complejos, diseñados para resolver problemas reales.

CE8: Ser capaz de reflexionar sobre los resultados obtenidos, delimitando su rango de validez y/o aplicabilidad.

CE11: Ser capaz de comprender y poder aplicar conocimientos avanzados de computación y métodos numéricos a problemas de ciencia, ingeniería y sociedad.

## DESCRIPCIÓN DE CONTENIDOS: PROGRAMA

1. Fundamentos del análisis numérico.
  - 1.1 Introducción a la aritmética en coma flotante.
  - 1.2 Condicionamiento y estabilidad.
  - 1.3 Coste computacional.
2. Normas vectoriales y matriciales.
  - 2.1 Normas vectoriales.
  - 2.1 Normas matriciales inducidas.
  - 2.3 Normas matriciales generales.
  - 2.4 El radio espectral.
3. La forma normal de Schur.
  - 3.1 Matrices unitarias.
  - 3.2 La forma triangular de Schur.
  - 3.3 Algunas aplicaciones.
4. Métodos directos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
  - 4.1 Eliminación gaussiana y la factorización LU.
    - 4.1.1 Eliminación gaussiana y la factorización LU sin pivotaje.
    - 4.1.2 La factorización LU con pivotaje: pivotaje parcial y total.
    - 4.1.3 Análisis de estabilidad de la factorización LU. El factor de crecimiento.
  - 4.2 Matrices simétricas: la factorización de Cholesky.
  - 4.3 La factorización QR.
    - 4.3.1 La factorización QR y el método de Gram-Schmidt.
    - 4.3.2 La factorización QR mediante reflexiones de Householder.
5. Métodos directos para el cálculo de autovalores y autovectores.
  - 5.1 Reducción a Hessenberg y forma tridiagonal.
  - 5.2 El algoritmo QR.
    - 5.2.1 Los métodos de la potencia y la potencia inversa con desplazamiento.
    - 5.2.2 Iteración de subespacios.
    - 5.2.3 El algoritmo QR.
    - 5.2.4 El algoritmo QR en la práctica.
    - 5.2.5 Algoritmos para matrices simétricas.
  - 5.3 Sensibilidad del problema de autovalores.
6. La SVD: cálculo y algunas aplicaciones.
  - 6.1 La SVD: existencia y propiedades básicas.
  - 6.2 Algoritmos para el cálculo de la SVD.
  - 6.3 Aplicaciones de la SVD en problemas de aproximación de rango bajo.
    - 6.3.1 Distancia a la singularidad.

- 6.3.2 Compresión de imágenes.
- 6.3.3 Análisis de componentes principales.
- 6.3.4 Otras aplicaciones.
- 7. Problemas de mínimos cuadrados.
  - 7.1 Propiedades básicas.
  - 7.2 Solución de problemas de mínimos cuadrados. La pseudoinversa.
  - 7.3 Ecuaciones normales vs QR para resolver problemas de mínimos cuadrados.
  - 7.4 Resolución de problemas de mínimos cuadrados usando la SVD.
- 8. Métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales y calcular autovalores.
  - 8.1 Métodos de Krylov.
    - 8.1.1 Propiedades básicas.
    - 8.1.2 El método del gradiente conjugado.
    - 8.1.3 Otros métodos.
  - 8.2 Los métodos de Lanczos y Arnoldi para el cálculo de autovalores.
- 9. Otras aplicaciones del álgebra lineal numérica.
  - 9.1 PageRank.
  - 9.2 Completación de matrices.
  - 9.3 Minería de datos.

#### ACTIVIDADES FORMATIVAS, METODOLOGÍA A UTILIZAR Y RÉGIMEN DE TUTORÍAS

El curso está concebido como un curso práctico desde el punto de vista computacional. Todas las sesiones (que se realizarán, presumiblemente, en el laboratorio), incluirán, al menos, una práctica con el programa MATLAB. La participación en clase en el desarrollo de estas prácticas será fundamental para alcanzar los objetivos del curso. Se podrán realizar dichas prácticas en grupo, y deberán ser entregadas resueltas antes del final del cuatrimestre. El curso incluye una formación básica en el programa MATLAB, donde se expondrán los comandos básicos y las herramientas elementales de programación.

Los estudiantes tendrán a su disposición las notas de la asignatura, con todos los contenidos que se van a trabajar, y que incluyen una serie de ejercicios para que los estudiantes profundicen en los contenidos de la asignatura o resuelvan algunos de los problemas que se dejan abiertos en las notas.

Habrà un horario de tutorías semanales acorde con la normativa de la universidad.

#### SISTEMA DE EVALUACIÓN

Se realizarán 28 prácticas de laboratorio a lo largo del cuatrimestre. Las prácticas deberán ser realizadas por los estudiantes, bien individualmente o en pequeños grupos (máximo de cuatro personas). La calificación de las prácticas constituirá el 40% de la nota final.

Asimismo, los estudiantes deberán resolver algunos de los problemas planteados en las notas del curso, y entregar las soluciones antes del final del cuatrimestre. La calificación de estos ejercicios tendrá un peso del 20% en la calificación final del estudiante.

Habrà un examen final que contribuirá con el 40% restante de la nota del curso. El examen podrá contener alguna parte relacionada con las prácticas mencionadas anteriormente, así como con los ejercicios del curso.

Para aprobar la asignatura será imprescindible aprobar el examen final (es decir, obtener, al menos, la mitad de la calificación máxima prevista para el examen).

<b>Peso porcentual del Examen Final:</b>	40
<b>Peso porcentual del resto de la evaluación:</b>	60

#### BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

- Biswa N. Datta Numerical Linear Algebra and Applications, 2nd ed, SIAM, 2010
- David S. Watkins Fundamentals of Matrix Computations, John Wiley and Sons, 2002
- James W. Demmel Applied Numerical Linear Algebra, SIAM, 1997
- Nicholas J. Higham Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, SIAM, 2002

#### BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

- Gene Golub, Charles Van Loan Matrix Computations, 4th ed, The Johns Hopkins University Press, 2002
- George W. Stewart, Ji-Guang Sun Matrix Perturbation Theory, Academic Press, 1990
- Gilbert Strang Linear Algebra and Learning from Data, Wellesley Cambridge Press, 2019
- Ilse Ipsen Numerical Matrix Analysis, SIAM, 2009
- Lars Eldén Matrix Methods in Data Mining and Pattern Recognition, SIAM, 2007

- Michael L. Overton Numerical Computing with IEEE Floating Point Arithmetic, SIAM, 2001
- Roger A. Horn, Charles R. Johnson Matrix Analysis, 2nd ed, Cambridge University Press, 2013